Рамануђанов доказ Бертрановог постулата

Филип Јевтић

11.5.2011.*

1 Увод

Јосеф Бертранд[1] је 1845-те формулисао хипотезу да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји прост број између n и $2n$ предходно проверивши тврђење за све $n \in [2, 3 \times 10^6]$. Хипотезу је први доказао Чебишев[2] 1850-те од када се тврђење назива и Чебишевљева теорема. Касније доказе пронашли су Рамануђан[3][2], користећи особине гама функције, и Ердош[4][3] који је пронашао елементарни доказ користећи особине биномних коефицијената. Овде ћемо приказати интересантан Рамануђанов доказ нешто слабијег тврђења. У том циљу дефинишимо следеће функције које ће нам бити неопходне.

Дефиниција 1.1. Нека је $n \in \mathbb{N}$, p прост и $x \in \mathbb{R}$. Вон Мандголтова[5] функција је

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & n = p^\alpha \wedge \alpha \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Чебишевљева прва и друга функција су редом

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \sum_{p \leqslant x} \log p \\ \psi(x) &= \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n) \end{aligned}$$

2 Доказ тврђења

Теорема 2.1 (Чебишевљева теорема). *За довољно велико x увек постоји прост број између x и $2x$.*

Доказ. Довољно је да покажемо да за довољно велико x важи

$$\vartheta(2x) - \vartheta(x) > 0$$

*Последњи пут модификовано: 28.10.2012.

[1] Joseph Bertrand (1822 - 1900) - француски математичар

[2] Пафнутий Львович Чебишёв (1821 - 1894) - руски математичар

[3] Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920) - индијски математичар

[4] Paul Erdos (1913 - 1996) - мађарски математичар јеврејског порекла

[5] Hans Carl Friedrich von Mangoldt (1854 - 1925) - немачки математичар

Посматрајмо функцију

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \log n$$

Применом формула парцијалног сумирања

$$\sum_{x \leqslant n \leqslant y} a_n f(n) = A(y)f(y) - \int_x^y A(t)f'(t)dt$$

на $S(x)$ закључујемо да важи

$$S(x) = x\log x - x + O(\log x) \tag{2.1}$$

Такође је

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \log n = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{de \leqslant x} \Lambda(d) = \sum_{d \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \tag{2.2}$$

Приметимо да за произвољан низ a_n такав да $a_n \searrow 0$ важи

$$a_1 - a_2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \leqslant a_1 - a_2 + a_3 \tag{2.3}$$

Како је низ $a_n = \psi(\frac{x}{n})$ очигледно такав то је

$$\begin{aligned} S(x) - 2S\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) - 2\sum_{x \leqslant \frac{x}{2}} \psi\left(\frac{x}{2n}\right) && (2.4)\\ &= \sum_{n \leqslant x} (-1)^{n-1} \psi\left(\frac{x}{n}\right) && (2.5)\\ &\leqslant \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) && (2.6) \end{aligned}$$

одакле следи

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) \geqslant x\log 2 + O(\log x) \tag{2.7}$$

Даље, из (2.3) и (2.5) закључујемо да је

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant x\log x + O(\log x) \tag{2.8}$$

За $t < 2$ је $\psi(t) = 0$ те за $n > \frac{logx}{log2} - 1$ је $\psi(\frac{x}{2^n}) = 0$. Сумирањем неједнакости

$$\psi\left(\frac{x}{2^n}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \leqslant \frac{x}{2^n} \log x + O(\log x)$$

добијамо

$$\psi(x) \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\frac{logx}{log2}-1} \frac{1}{2^n}\right) x\log x + \left(\frac{logx}{log2} - 1\right) O(\log x) \leqslant 2x\log x + O(\log^2 x) \tag{2.9}$$

Из (2.7) и (2.9) следи да је

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant x\log 2 - \psi\left(\frac{x}{3}\right) + O(\log x) \geqslant \frac{\log 2}{3} x + O(\log^2 x) \tag{2.10}$$

Приметимо да је

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(x^{\frac{1}{n}}) \sum_{n \leqslant \frac{\log x}{\log 2}} \vartheta(x^{\frac{1}{n}}) \tag{2.11}$$

Како је очигледно

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log x \leqslant x \log x$$

то из (2.11) следи

$$0 \leqslant \psi(x) - \vartheta(x) \leqslant \sum_{2 \leqslant n \leqslant \frac{\log x}{\log 2}} x^{\frac{1}{n}} \log x^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\log x}{\log 2} \sqrt{x} \log \sqrt{x} \tag{2.12}$$

одакле закључујемо

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x} \log^2 x) \tag{2.13}$$

Сада из (2.10) следи да је

$$\vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant \frac{\log 2}{3} x + O(\sqrt{x} \log^2 x) \tag{2.14}$$

Како је

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\log 2}{3} x}{\sqrt{x} \log^2 x} = \infty$$

то заиста за довољно велико x увек постоји прост број између x и $2x$. $\square$

Литература

[1] M. Ram Murty: *Problems in Analytic Number Theory*, Second Edition (2008), Springer.

[2] Ramanujan, Srinivasa: *A proof of Bertrand's postulate*, Journal of the Indian Mathematical Society, Vol. 11 (1919), p. 181-182.

[3] Erdos, Paul: *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Litt. Sci. Szeged, Vol 5. (1932), p. 194-198.

[4] Apostol, Tom M.: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer.